

## RİYAZİYYAT

УДК 519. 852

BAŞ HİSSƏSİ KOŞİ-RİMAN OLAN YÜKLƏNMİŞ TƏNLİK ÜÇÜN  
QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ VƏ TƏQRİBİ HƏLL

N.Ə.ƏLİYEV, İ.M.TAĞIYEVA

*Bakı Dövlət Universiteti**asgartagiyev@yahoo.com*

*Burada birinci tərtib elliptik tip yüklənmiş tənlik üçün kvadratda qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılmışdır. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllinin köməyi ilə zəruri şərtlər alınmışdır. Bu zəruri şərtlər özündə sinqulyarlıq saxlayır. Verilmiş sərhəd şərtlərindən istifadə etməklə zəruri şərtlər requlyarlaşdırılır. Alınan requlyar ifadələr verilmiş sərhəd şərtlərinə qatılmaqla axtarılan funksiyanın sərhəd qiymətləri üçün ikinci növ Fredholm tipli, nüvəsində sinqulyarlıq olmayan integral tənliklər sistemi alınır. Bununla da, qoyulmuş məsələnin Fredholmluğu isbat olunur. Məsələnin həlli isə əsas münasibətdən alınır. Nəhayət, qoyulmuş məsələ diskretləşdirilərək iki test məsələsinə baxılır.*

**Açar sözlər:** Koşi-Riman tənliyi, yüklənmiş tənlik, qeyri-lokal sərhəd şərti

Koşi-Riman tənliyi birinci tərtib elliptik tip tənlik olduğundan bu tənlik üçün lokal şərtlərin verilməsi məqsədəuyğun deyil. Ona görə kvadratda baxılan baş hissəsi Koşi-Riman olan yüklənmiş tənlik üçün sərhəd şərti qeyri-lokal veriləcəkdir. Koşi-Riman tənliyi üçün sərhədi hamar olan ixtiyari oblastda qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələ yaxşı araşdırılmışdır [1], [2]. Həmin tənlik üçün spektral məsələ [3], Steklov məsələsi [4] və tərs məsələ [5] araşdırılmışdır. Burada kvadratda baxılan məsələ üçün iki testə baxılmışdır.

**1. Məsələnin qoyuluşu:** aşağıdakı kimi məsələyə baxaq.

$$-u(0, y) = f(x), x \in D = \{x = (t, y) : (0, 1), (0, 1)\} \quad (1.1)$$

tənliyinin

$$\begin{aligned} u(x, 0) + u(x, 1) &= \varphi(x), \\ u(0, y) + u(1, y) &= \psi(y), \end{aligned} \quad (1.2)$$

sərhəd şərtləri daxilində həlli araşdırılır. Burada  $i = \sqrt{-1}$ ,  $f(x)$ ,  $U(x, \xi)$ ,  $U(x, \xi)$  kəsilməz funksiyalardır. Məlumdur ki, Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli [6]

$$U(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} \quad (1.3)$$

şəklindədir.

**Əsas münasibətin alınması:** Verilmiş (1.1) tənliyini (1.3) fundamental həllinə vurub  $D$  kvadratı üzrə inteqrallayaq.

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} U(x, \xi) d\xi + i \int_{\gamma} U(x, \xi) d\xi + \\ & + \int_{\gamma} U(x, \xi) d\xi - \\ & = \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Aldığımız (1.4) ifadəsində sol tərəfdə olan birinci və ikinci inteqralları aşağıdakı kimi çevirək:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} U(x, \xi) d\xi &= u(x)U(x, \xi) - \int_{\gamma} d\xi, \\ \int_{\gamma} U(x, \xi) d\xi &= u(x)U(x, \xi) - \int_{\gamma} d\xi. \end{aligned}$$

Bu ifadələri (1.4)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} U(x, \xi) d\xi - u(x)U(x, \xi) + \\ & + i \int_{\gamma} U(x, \xi) d\xi - u(x)U(x, \xi) + \\ & + \int_{\gamma} U(x, \xi) d\xi - \\ & = \int_{\gamma} \dots dx = \int_{\gamma} (x - \xi) dx = \\ & = \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Bu əsas münasibətdə ikinci ifadələr zəruri şərtlərdir. Bunları ayıraq:

$$\begin{aligned} u(x) &= \dots, \\ u(x) &= \dots, \\ u(x) &= \dots + \dots, \\ u(x) &= \dots, \end{aligned}$$

burada (...) ilə sinqulyar olmayan hədlərin cəmi işarə edilmişdir. Sərhəd şərtlərindən istifadə etməklə bu sinqulyarlıqları requlyarlaşıdırıq. Aşağıdakı kimi xətti kombinasiyalara baxaq.

$$-u(x) + u(x) = \dots \quad (1.6)$$

$$u(0, \dots) + u(1, \dots) = - \dots - d \dots \dots \quad (1.7)$$

Alınan (1.6),(1.7) requlyar ifadələr verilmiş (1.2) sərhəd şərtlərinə qatılmaqla axtarılan funksiyanın sərhəd qiymətləri üçün aşağıdakı tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{aligned} u(\dots, 0) + u(\dots, 1) &= \dots, \\ -u(\dots) + u(\dots) &= - \dots \dots, \\ u(0, \dots) + u(1, \dots) &= \dots, \\ -u(0, \dots) + u(1, \dots) &= - \dots - d \dots \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq.

**Teorem 1** Verilmiş (1.1)-(1.2) sərhəd məsələsində  $f(x)$   $D$ -də kəsilməz,  $(\dots)$  və  $(\dots)$   $[0,1]$ ,  $\dots$  olduqda kəsilməz diferensiallanan olub,  $(0) = (1) = 0$ ,  $(0) = (1) = 0$  şərtləri ödənilirsə, onda (1.8) şəklində alınan dörd ifadə requlyardır.

Aldığımız (1.8) sistemi asanlıqla ikinci növ Fredholm tipli normal şəkilli, nüvələrində sinqulyarlıq olmayan integral tənliklər sisteminə gətirilir.

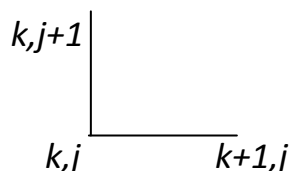
$$\begin{aligned} u(\dots, 1) &= \dots + \dots - \dots \\ &+ \dots U(\dots) u(\dots) U(\dots)]d + \\ &+ \dots U(\dots) u(\dots) U(\dots)]d \\ &+ \dots U(\dots) d + \\ &+ \dots U(\dots) d + \\ &+ \dots + \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$u(\dots) = \dots - \dots - \dots$$

$$\begin{aligned} &+ \dots U(\dots) u(\dots) U(\dots)]d \\ &+ \dots U(\dots) u(\dots) U(\dots)]d \\ &+ \dots U(\dots) d \\ &+ \dots U(\dots) d \end{aligned}$$



iştirak edir. Deməli, diskretləşdirmədə 36 məchul iştirak edir. Koşi-Riman tənliyi üçün



şablonundan istifadə edildiyi üçün (1.1) tənliyində  $u(k, j) = \dots$ , (2.1)

ifadələrini qəbul etsək :  $u(k, j+1) = (1+i)u(k, j) + u(k+1, j)$ ,  $k, j = \overline{1, 9}$  (2.2)

kimi 25 xətti cəbri tənlik, (1.2) sərhəd şərtlərindən isə

$$\begin{aligned} u(k, 0) &= 2, \quad k = \overline{1, 9}; \\ u(0, j) &= 2, \quad j = \overline{1, 9}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

kimi 12 xətti cəbri tənliklər sistemi almış oluruq. Bu 12 xətti cəbri tənliklər sistemi xətti asılı olduğundan (və üçün uzlaşma şərtindən görünür) onlardan biri atılır. Beləliklə, 36 məchul və 36 xətti cəbri tənliklər sistemi alınır. Biz burada

$$f(x) = \begin{pmatrix} u(k, j+1) \\ u(k, j) \\ u(k+1, j) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} = 2 + 1+i \\ = 2 + 1+i \end{pmatrix},$$

olduqlarını qəbul edirik. Alınan testin dəqiq həlli  $u(x) = \dots + i$  kimidir. Aşağıdakı kimi işarələmələr aparsaq :

$$A = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix},$$

burada  $(k = \overline{1, 9})$  9 9 tərtibli matrislər olub, sıfırdan fərqli elementləri aşağıdakı kimidir

$$\begin{aligned} &= -1-i, \quad = -1-i-h, \quad k = \overline{1, 9}; \quad = -1-i+h; \quad = -1-i, \quad k = 7, 8; \\ &= 1, \quad k = \overline{1, 9}; \quad = 1, \quad k = 6, 7 \quad = i, \quad k = \overline{1, 9}; \quad = h, \quad k = \overline{1, 9}; \\ &= -h, \quad k = \overline{1, 9}; \quad = h, \quad k = \overline{1, 9}; \\ &= i, \quad k = 1, 2; \quad = i, \quad k = \overline{1, 9}; \quad = 1, \quad k = 1, 2; \quad = -1-i; \\ &= 0, \quad = 0, \\ &= -h; \quad = h; \quad = -h, \quad k = \overline{1, 9}; \quad = -h, \quad k = 1, 2; \\ &= -1-i, \quad k = 1, 2; \quad = 1, \quad k = 1, 2; \quad = -1-i+h; \quad = h, \quad k = \overline{1, 9}; \\ &= 1, \quad k = \overline{1, 9}; \quad = i, \quad k = 1, 2; \quad = -1-i, \quad k = \overline{1, 9}; \end{aligned}$$



№	Nöqtə	Həllin dəqiq qiymətləri	Həllin təqribi qiymətləri	Xəta
1	(0,0)	0	0.0083 - 0.0251i	0.0083 - 0.0251i
2	(0,0.2)	0.04	0.1208 - 0.0647i	0.0808-0.0647i
3	(0,0.4)	0.16	0.2719 - 0.0478i	0.1119-0.0478i
4	(0,0.6)	0.36	0.4746 - 0.0376i	0.1146- 0.0376i
5	(0,0.8)	0.64	0.7265-0.0038i	0.0865- 0.0038i
6	(0,1)	1	0.9917 + 0.0251i	-0.0003+ 0.0251i
7	(0.2,0)	0.04	0.0478 + 0.0874i	0.0078+ 0.0874i
8	(0.2,0.2)	0.08+0.04i	0.0959 + 0.0319i	0.0159-0.0081i
9	(0.2,0.4)	0.2+0.08i	0.2572 + 0.0543i	0.0572-0.0257i
10	(0.2,0.6)	0.4+0.12i	0.4383 + 0.0730i	0.0383-0.047i
11	(0.2,0.8)	0.68+0.16i	0.7018 + 0.0858i	0.0218-0.0742i
12	(0.2,1)	1.04+0.2i	1.0322 + 0.1126i	-0.0078-0.0874i
13	(0.4,0)	0.16	0.2009 + 0.1354i	0.0409+ 0.1354i
14	(0.4,0.2)	0.2+0.08i	0.1631 + 0.1385i	-0.0369+0.0585i
15	(0.4,0.4)	0.32+0.32i	0.3314 + 0.1345i	0.0114-0.1855i
16	(0.4,0.6)	0.52+0.24i	0.5205 + 0.1952i	0.0005-0.0448i
17	(0.4,0.8)	0.8+0.32i	0.7768 + 0.2404i	-0.0232-0.0796i
18	(0.4,1)	1.16+0.16i	1.1191 + 0.2646i	-0.0409+0.1046i
19	(0.6,0)	0.36	0.4057 + 0.1042i	0.0457+ 0.1042i
20	(0.6,0.2)	0.4+0.12i	0.3671 + 0.1628i	-0.0329+0.0428i
21	(0.6,0.4)	0.52+0.24i	0.4741 + 0.2294i	-0.0459-0.0106i
22	(0.6,0.6)	0.72+0.72i	0.6807 + 0.3167i	-0.0393-0.4033i
23	(0.6,0.8)	1+0.48i	0.9647 + 0.4136i	-0.0353-0.0664i
24	(0.6,1)	1.36+0.6i	1.3143 + 0.4958i	-0.0457-0.1042i
25	(0.8,0)	0.64	0.6812 + 0.0730i	0.0412+ 0.0730i
26	(0.8,0.2)	0.68+0.16i	0.6267 + 0.2229i	-0.0533+0.0629i
27	(0.8,0.4)	0.8+0.32i	0.7164 + 0.3428i	-0.0836+0.0228i
28	(0.8,0.6)	1+0.48i	0.9155 + 0.4670i	-0.0845-0.013i
29	(0.8,0.8)	1.28+0.64i	1.2209 + 0.5950i	-0.0591-0.045i
30	(0.8,1)	1.64+0.8i	1.5988 + 0.7270i	-0.0412-0.073i
31	(1,0)	1	0.9917 + 0.0251i	-0.0083+0.0251i
32	(1,0.2)	1.04+0.2i	0.9592 + 0.2647i	-0.0808+0.0647i
33	(1,0.4)	1.16+0.4i	1.0481 + 0.4478i	-0.1119+0.0478i
34	(1,0.6)	1.36+0.6i	1.2454 + 0.6376i	-0.1146+0.0376i
35	(1,0.8)	1.64+0.8i	1.5535 + 0.8038i	-0.0865+0.0038i
36	(1,1)	2+i	2.0083 + 0.9749i	0.0083-0.0251i

**Məsələ 2:**

$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad k=1,2 \quad (2.5)$$

tənliyini

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 3u(t,1) + 2 - 3 - 6ti, \\ u(0,t) &= 2u(1,t) - 2 + 4ti, \quad t \end{aligned} \quad (2.6)$$

sərhəd şərtləri daxilində təqribi həll edək. Tənliyin dəqiq həlli

$$u(x) = \dots + 2i \quad (2.7)$$

şəklindədir.

Addımı  $h=1$  qəbul edib, məsələni diskretləşdirək:

$$\begin{aligned} +i &= (1+i) \dots, m=0, n=0, \\ +i &= (1+i) \dots, \\ =3 &-3, \\ =2 &+2, \\ =2 &+1-4i. \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.5)-(2.6) sərhəd məsələsi (2.8) xətti cəbri tənliklər sisteminə gətirilir. (2.8) xətti cəbri tənliklər sisteminin həlli və uyğun nöqtələrdə həllin dəqiq qiymətləri aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

Nö	Nöqtə	Həllin dəqiq qiymətləri	Həllin təqribi qiymətləri	Xəta
1	(0,0)	0	0.24-1.68i	0.24-1.68i
2	(0,1)	1	1.08-0.56i	0.08-0.56i
3	(1,0)	-1	-0.88-0.84i	0.12-0.84i
4	(1,1)	2i	0.04+1.72i	0.04-0.28i

#### ƏDƏBİYYAT

1. Aliyev N.A., Fatemi M.R., Jahanshahi M. Analytic Solution for the Cauchy-Riemann Equation with non-Local Boundary Conditions in the First Semi-Quarter. Jsci./Tarbiat Moallem University v.9 No1 2010 p.29-40, Tehran.Iran.
2. Aliyev N., Jahanshahi M. Sufficient Conditions for Reduction of the BVP including a Mixed PDE with non-Local Boundary Conditions to Fredholm Integral Equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 28 (1997) No.3, p.419-425.
3. Jahanshahi M., Aliyev N. Determining of an Analytic Function on its Analytic Domain by Cauchy-Riemann Equation with Special Kind of Boundary Conditions. Southeast Asian Bulletin Mathematics 28 (2004) No.1, pp.33-39.
4. Sajjadmanesh M., Jahanshahi M., Aliyev N. Tikhonov-Lavrentev Type Inverse Problem including Cauchy-Riemann Equation. Azerbaijan Journal of Mathematics, Baku, January 2013, Vol 3, No.1, pp.104-110.
5. Abbasova A.Kh., Aliyev N.A. About the Problem of Stefan for the Cauchy-Riemann Equation with Non-Local and Global Terms in the Boundary Condition. Materials of International Conference on Mathematical Theories and Problems of Their Application and Teaching dedicated to the 870<sup>th</sup> Anniversary of Great Poet and Philosopher Nizami Ganjavi, Azerbaijan, Ganja, September 23-25, 2011, pp.45-48.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971, 512 с.
7. Aliyev N.A. <http://nihan.jsoft.ws>

**ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ЗАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО УРАВНЕНИЕ  
КОШИ-РИМАНА И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ**

**Н.А.АЛИЕВ, И.М.ТАГИЕВА**

**РЕЗЮМЕ**

В излагаемой работе рассмотрена граничная задача для эллиптического загруженного уравнения первого порядка с нелокальными граничными условиями в квадрате. С помощью фундаментального решения уравнения Коши-Римана получены необходимые условия, которые содержат сингулярные слагаемые. Используя данные граничные условия, необходимые условия регуляризируются. Объединяя граничные условия с полученными регулярными соотношениями, получаем систему интегральных уравнений вида Фредгольма второго рода относительно граничных значений, ядро которых не содержит сингулярность. Таким образом, доказывается Фредгольмовость поставленной задачи. Далее, решение поставленной граничной задачи получается из основного соотношения. В конце переходя к численному решению поставленной задачи, рассматривается два тестовых примера.

**Ключевые слова:** уравнение Коши-Римана, загруженное уравнение, нелокальные граничные условия.

**NON-LOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A LOADED EQUATION WITH  
CAUCHY-RIEMANN EQUATION IN ITS PRINCIPAL PART  
AND ITS APPROXIMATE SOLUTION**

**N.A.ALIYEV, I.M.TAGIYEVA**

**SUMMARY**

In the paper we consider a problem for a first order elliptic loaded equation containing non-local terms in the boundary condition in a square domain. The necessary conditions are obtained by means of the fundamental solution of Cauchy-Riemann equation. These necessary conditions have singularity. Using the given boundary conditions, the necessary conditions are regularized. Combining the obtained regular expressions with the boundary conditions, the system of the Fredholm type integral equations of the second kind is obtained with respect to the boundary values of the unknown function with no singularity in the kernels. So, the Fredholm property of the considered problem is proved. The solution of the considered problem is found from the basic relationships. Finally, discretizing the considered problem two test problems are solved.

**Key words:** Cauchy-Riemann equation, loaded equation, non-local boundary conditions

*Redaksiyaya daxil oldu: 04.05.2015-ci il*

*Çapa imzalandı: 17.11.2015-ci il*